量子力学A演習　解答例 （演習13）v1.2

- **交換子の公式**（参考）

$[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$, 、$[\hat{A},\hat{B}\hat{C}]=\hat{B}[\hat{A},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{B}]\hat{C}$

1.　$\hat{L}_x,\hat{L}_y,\hat{L}_z$ がエルミート演算子であることを示せ

（解答例）　$\hat{L}_x{}^\dagger=(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y)^\dagger=(\hat{y}\hat{p}_z)^\dagger-(\hat{z}\hat{p}_y)^\dagger=\hat{p}_z{}^\dagger\hat{y}^\dagger-\hat{p}_y{}^\dagger\hat{z}^\dagger=\hat{p}_z\hat{y}-\hat{p}_y\hat{z}=\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y=\hat{L}_x$

ただし、位置演算子も運動量演算子もエルミート演算子であることと、$[\hat{y},\hat{p}_z]=0$を使った。（位置演算子と運動量演算子の異なる成分同士の交換関係は０になる事に注意。）
よって、$\hat{L}_x$ はエルミート。$\hat{L}_y,\hat{L}_z$ についても同様にしてエルミートであることを示せる。

2.　$[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{L}_z,\ [\hat{L}_y,\hat{L}_z]=i\hbar\hat{L}_x,\ [\hat{L}_z,\hat{L}_x]=i\hbar\hat{L}_y$ を証明せよ

（解答例）$[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=[(\hat{y}\hat{p}_z-\hat{z}\hat{p}_y),(\hat{z}\hat{p}_x-\hat{x}\hat{p}_z)]=[\hat{y}\hat{p}_z,\hat{z}\hat{p}_x]-[\hat{z}\hat{p}_y,\hat{z}\hat{p}_x]-[\hat{y}\hat{p}_z,\hat{z}\hat{p}_x]+[\hat{z}\hat{p}_y,\hat{x}\hat{p}_z]$

$$=[\hat{y}\hat{p}_z,\hat{z}\hat{p}_x]+[\hat{z}\hat{p}_y,\hat{x}\hat{p}_z]=\hat{y}[\hat{p}_z,\hat{z}\hat{p}_x]+[\hat{y},\hat{z}\hat{p}_x]\hat{p}_z+\hat{z}[\hat{p}_y,\hat{x}\hat{p}_z]+[\hat{z},\hat{x}\hat{p}_z]\hat{p}_y$$

$$=\hat{y}[\hat{p}_z,\hat{z}\hat{p}_x]+[\hat{z},\hat{x}\hat{p}_z]\hat{p}_y=\hat{y}([\hat{p}_z,\hat{z}]\hat{p}_x+\hat{z}[\hat{p}_z,\hat{p}_x])+([\hat{z},\hat{x}]\hat{p}_z+\hat{x}[\hat{z},\hat{p}_z])\hat{p}_y$$

$$=\hat{y}[\hat{p}_z,\hat{z}]\hat{p}_x+\hat{x}[\hat{z},\hat{p}_z]\hat{p}_y=\hat{y}(-i\hbar)\hat{p}_x+\hat{x}(i\hbar)\hat{p}_y=i\hbar(\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x)=i\hbar\hat{L}_z$$

ただし、位置演算子と運動量演算子の異なる成分同士の交換関係は０になる事と、公式 $[\hat{A}\hat{B},\hat{C}]=\hat{A}[\hat{B},\hat{C}]+[\hat{A},\hat{C}]\hat{B}$ を使った。他の交換関係についても同様にして示せる。

3.　$[\hat{L^2},\hat{L}_x]=0,\ [\hat{L^2},\hat{L}_y]=0,\ [\hat{L^2},\hat{L}_z]=0$ を証明せよ

（解答例）$[\hat{L^2},\hat{L}_z]=0$ を示す。

$$[\hat{L^2},\hat{L}_z]=[\hat{L_x^2}+\hat{L_y^2}+\hat{L_z^2},\hat{L}_z]=[\hat{L_x^2},\hat{L}_z]+[\hat{L_y^2},\hat{L}_z]+[\hat{L_z^2},\hat{L}_z]$$

$$=(\hat{L}_x[\hat{L}_x,\hat{L}_z]+[\hat{L}_x,\hat{L}_z]\hat{L}_x)+(\hat{L}_y[\hat{L}_y,\hat{L}_z]+[\hat{L}_y,\hat{L}_z]\hat{L}_y)+(\hat{L}_z[\hat{L}_z,\hat{L}_z]+[\hat{L}_z,\hat{L}_z]\hat{L}_z)$$

$$=(\hat{L}_x[\hat{L}_x,\hat{L}_z]+[\hat{L}_x,\hat{L}_z]\hat{L}_x)+(\hat{L}_y[\hat{L}_y,\hat{L}_z]+[\hat{L}_y,\hat{L}_z]\hat{L}_y)$$

$$=\hat{L}_x(-i\hbar\hat{L}_y)+(-i\hbar\hat{L}_y)\hat{L}_x+\hat{L}_y(i\hbar\hat{L}_x)+(i\hbar\hat{L}_x)\hat{L}_y=0$$

他の交換関係についても同様にして示せる。

4. 昇降演算子を次のように定義する。

$\hat{L}_+\equiv\hat{L}_x+i\hat{L}_y$ （上昇演算子）、$\hat{L}_-\equiv\hat{L}_x-i\hat{L}_y$ （下降演算子）

この時、$[\hat{L}_+,\hat{L}_-]=2\hbar\hat{L}_z$、$[\hat{L}_z,\hat{L}_\pm]=\pm\hbar\hat{L}_\pm$、$[\hat{L^2},\hat{L}_\pm]=0$ を証明せよ。

（略解）

$$[\hat{L}_+,\hat{L}_-]=[\hat{L}_x+i\hat{L}_y,\hat{L}_x-i\hat{L}_y]=[\hat{L}_x,\hat{L}_x]+i[\hat{L}_y,\hat{L}_x]-i[\hat{L}_x,\hat{L}_y]+[\hat{L}_y,\hat{L}_y]$$

$$=i[\hat{L}_y,\hat{L}_x]-i[\hat{L}_x,\hat{L}_y]=i(-i\hbar\hat{L}_z)-i(i\hbar\hat{L}_z)=2\hbar\hat{L}_z$$

$$[\hat{L}_z,\hat{L}_\pm]=[\hat{L}_z,\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y]=[\hat{L}_z,\hat{L}_x]\pm i[\hat{L}_z,\hat{L}_y]=i\hbar\hat{L}_y\pm i(-i\hbar\hat{L}_x)=\pm\hbar\hat{L}_\pm$$

$$[\hat{L^2},\hat{L}_\pm]=[\hat{L_x^2}+\hat{L_y^2}+\hat{L_z^2},\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y]=[\hat{L_x^2},\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y]+[\hat{L_y^2},\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y]+[\hat{L_z^2},\hat{L}_x\pm i\hat{L}_y]$$

$$=[\hat{L_x^2},\hat{L}_x]\pm i[\hat{L_x^2},\hat{L}_y]+[\hat{L_y^2},\hat{L}_x]\pm i[\hat{L_y^2},\hat{L}_y]+[\hat{L_z^2},\hat{L}_x]\pm i[\hat{L_z^2},\hat{L}_y]$$

$$=\pm i\hat{L}_x[\hat{L}_x,\hat{L}_y]\pm i[\hat{L}_x,\hat{L}_y]\hat{L}_x+\hat{L}_y[\hat{L}_y,\hat{L}_x]+[\hat{L}_y,\hat{L}_x]\hat{L}_y$$

$$+\hat{L}_z[\hat{L}_z,\hat{L}_x]+[\hat{L}_z,\hat{L}_x]\hat{L}_z\pm i\hat{L}_z[\hat{L}_z,\hat{L}_y]\pm i[\hat{L}_z,\hat{L}_y]\hat{L}_z=0$$

5. Y_0^0, Y_1^0 が規格化条件を満たしていることを(6-4-15)式を計算して確かめよ。

（略解） $Y_0^0(\theta,\phi)=\dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$、 $Y_1^0(\theta,\phi)=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}\cos\theta$

規格化条件は、 $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}Y_l^{*m}(\theta,\phi)Y_l^m(\theta,\phi)\sin\theta d\theta=1$

Y_0^0の場合、 $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}Y_0^{*0}(\theta,\phi)Y_0^0(\theta,\phi)\sin\theta d\theta=2\pi\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=1$

Y_1^0 の場合、 $\displaystyle\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}Y_1^{*0}(\theta,\phi)Y_1^0(\theta,\phi)\sin\theta d\theta=2\pi\frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta d\theta=1$

（最後の積分は、例えば、 $x=\cos\theta$ と置いて、置換積分を行えば良い）

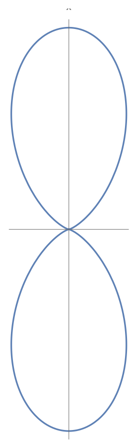
6. $|Y_1^m(\theta,\phi)|^2$ $(l=1,\ m=-1,\ 0,\ +1)$ の z-x平面での図を書き、それをz軸の周りに回転すると、

6-4-3節の$|Y_1^m(\theta,\phi)|^2$の３次元図のようになることを説明せよ。

（略解）

$|Y_1^{\pm1}(\theta,\phi)|^2=\dfrac{3}{8\pi}\sin^2\theta$ のz-x平面での図については、6-4-3節(p117)に示してある。z軸からθ 傾いた線上で $\propto\sin^2\theta$ の値のところに点を打っていくと、p117に示した図になる。

$|Y_1^0(\theta,\phi)|^2=\dfrac{3}{4\pi}\cos^2\theta$ は、z軸（縦軸）からθ 傾いた線上で $\propto\cos^2\theta$ の値のところに点を打っていけば良い（右図参照。 横軸は x）これをz軸の周りに回転させるとp117の図になる。



7. 球面調和関数 $Y_1^m(\theta,\phi)$ の次のような１次結合がそれぞれ y, z, x で書ける（最右辺の式になる）ことを示せ。

$$\begin{cases}K_1^{-1}=\dfrac{i}{\sqrt{2}}(Y_1^1+Y_1^{-1})=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}y\\ K_1^0=Y_1^0=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}z\\ K_1^1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-Y_1^1+Y_1^{-1})=\sqrt{\dfrac{3}{4\pi}}x\end{cases}$$

（解答例）

K_1^0 に関しては明らか。K_1^{-1} について示す。

$$K_1^{-1}=\frac{i}{\sqrt{2}}(Y_1^1+Y_1^{-1})=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}+\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}\right)=\sqrt{\frac{3}{16\pi}}i(-\sin\theta)(e^{i\phi}-e^{-i\phi})=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\sin\phi=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}y$$

$$K_1^1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-Y_1^1+Y_1^{-1})=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi}+\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}\right)=\sqrt{\frac{3}{16\pi}}(\sin\theta)(e^{i\phi}+e^{-i\phi})=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\sin\theta\cos\phi=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}x$$

$l=1$に属する３つの解、Y_1^{-1}, Y_1^0, Y_1^1 はそれらの線形結合によりK_1^{-1}, K_1^0, K_1^1 （立方調和関数）としてもやはり式(6-4-8)の解になっている。原子が立方対称の電場（結晶場）の中にに置かれた場合などは、球面調和関数よりも立方調和関数で扱った方が便利である。$|K_1^0|^2=|Y_1^0|^2$の場合は、p117の図にあるようにz軸方向に伸びている。$|K_1^1|^2$、$|K_1^{-1}|^2$は対称性から、$|K_1^0|^2$ と同じ形で、その長軸方向が、それぞれ、x軸、y軸方向に伸びている。p118の問題7の参考の中の図参照。

8. $l = l,\ m = l$ の状態 $|l, l>$ での期待値 $<\hat{L}_x>$、$<\hat{L}_y>$、$<\hat{L}_x^2>$、$<\hat{L}_y^2>$ を求めよ。

（$\hat{L}_x,\ \hat{L}_y$を問題4で定義された $\hat{L_+}$、$\hat{L_-}$で表し、

$\hat{L}_+|l,m> = c_+|l,m+1>$, $\hat{L}_-|l,m> = c_-|l,m-1>$ の関係を使え。（次の問題9参照）

また、この結果より、不確定性関係(3-6-6)式の等号を満たす場合になっている事を示せ。

（解答例）

$\hat{L_\pm} \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ なので、$\hat{L}_x = \dfrac{\hat{L_+} + \hat{L_-}}{2}$ 、$\hat{L}_y = \dfrac{\hat{L_+} - \hat{L_-}}{2i}$

$l = l,\ m = l$ の場合、$<\hat{L}_x>_{lm} = <\hat{L}_x>_{ll}$ だから、

$$<\hat{L}_x>_{ll} = <l,l|\hat{L}_x|l,l> = <l,l|\frac{\hat{L_+} + \hat{L_-}}{2}|l,l> = \frac{1}{2}<l,l|\hat{L_+}|l,l> + \frac{1}{2}<l,l|\hat{L_-}|l,l>$$

もともと m は $m = -l,\ -l+1,\ \dots\ ,l-1,\ l$ しか取れないので、$\hat{L_+}|l,l> = 0$ となる。

これと、$\hat{L_-}|l,l> = c'|l,l-1>$ を使って、

$$<\hat{L}_x>_{ll} = \frac{1}{2}<l,l|\hat{L_-}|l,l> = \frac{c'}{2}<l,l|l,l-1> = 0$$

（注意：最後は、規格直交化 の条件より $<l,m|l,m'> = \delta_{mm'}$ である事を使った）

同様にして、

$$<\hat{L}_y>_{ll} = <l,l|\hat{L}_y|l,l> = <l,l|\frac{\hat{L_+} - \hat{L_-}}{2i}|l,l> = \frac{1}{2i}<l,l|\hat{L_+}|l,l> - \frac{1}{2i}<l,l|\hat{L_-}|l,l> = 0$$

ここで $\hat{L_+}|l,l> = 0$, $\hat{L_-}|l,l> = c'|l,l-1>$ を使った。

（参考）念の為、$<\hat{L}_z>_{ll}$ を求めておくと、$<\hat{L}_z>_{ll} = <l,l|\hat{L}_z|l,l> = l<l,l|l,l> = l$

期待値で考えると、z軸への射影成分（z成分）が最大である $m = l$ の時は、$<\hat{L}_z>_{ll} = l,\ <\hat{L}_x>_{ll} = 0, <\hat{L}_y>_{ll} = 0,$

であるから、**角運動量ベクトルがz軸方向へ向いている古典的な場合に対応している**ことがわかる。

$$<\hat{L}_x^2>_{ll} = <l,l|\hat{L}_x^2|l,l> = <l,l|\left(\frac{\hat{L_+} + \hat{L_-}}{2}\right)\left(\frac{\hat{L_+} + \hat{L_-}}{2}\right)|l,l>$$

$$= \frac{1}{4}<l,l|\hat{L_+}\hat{L_+}|l,l> + \frac{1}{4}<l,l|\hat{L_-}\hat{L_+}|l,l> + \frac{1}{4}<l,l|\hat{L_+}\hat{L_-}|l,l> + \frac{1}{4}<l,l|\hat{L_-}\hat{L_-}|l,l>$$

$$= \frac{1}{4}<l,l|\hat{L_+}\hat{L_-}|l,l>$$

$$= \frac{1}{4}<l,l|\hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z - \hbar)|l,l> = \frac{1}{4}[l(l+1) - l(l-1)]\hbar^2 = \frac{1}{2}l\hbar^2$$

ただし、最後の列の式変形には問題９の(1)の関係式を使った。

$$<\hat{L}_y^2>_{ll} = <l,l|\hat{L}_y^2|l,l> = <l,l|\left(\frac{\hat{L_+} - \hat{L_-}}{2i}\right)\left(\frac{\hat{L_+} - \hat{L_-}}{2i}\right)|l,l>$$

$$= -\frac{1}{4}<l,l|\hat{L_+}\hat{L_+}|l,l> - \frac{1}{4}<l,l| - \hat{L_-}\hat{L_+}|l,l> - \frac{1}{4}<l,l| - \hat{L_+}\hat{L_-}|l,l> - \frac{1}{4}<l,l|\hat{L_-}\hat{L_-}|l,l>$$

$$= \frac{1}{4}<l,l|\hat{L_+}\hat{L_-}|l,l>$$

$$= \frac{1}{4}<l,l|\hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z - \hbar)|l,l> = \frac{1}{4}[l(l+1) - l(l-1)]\hbar^2 = \frac{1}{2}l\hbar^2$$

$$<(\Delta\hat{L}_x)^2>_{ll}<(\Delta\hat{L}_y)^2>_{ll} = (<\hat{L}_x^2>_{ll} - <\hat{L}_x>_{ll}^2)(<\hat{L}_y^2>_{ll} - <\hat{L}_y>_{ll}^2) = \frac{1}{4}l^2\hbar^4 \quad (*)$$

一方、不確定性の関係式は

$$<(\Delta\hat{L}_x)^2>_{ll}<(\Delta\hat{L}_y)^2>_{ll} \geq \frac{1}{4}|<[\hat{L}_x\hat{L}_y]>_{ll}|^2 = \frac{\hbar^2}{4}<l,l|\hat{L}_z|l,l>^2 = \frac{1}{4}l^2\hbar^2$$

なので、(*)は上の不確定性の関係の等号の場合（**最小不確定性の場合**）にあたる。

$|l,l>$ は $m=l$ の場合であるから、最もLがz軸に平行に近ずいた場合である。講義ノートにもあるように、不確定性関係は０でないので、量子力学的には Lはz軸と平行にはなれない（期待値で見ると古典的なベクトルに対応）。

９. 角運動量（記号は L だが、軌道角運動量であるとの制限はつけないことにする）の固有状態と固有値に関して交換関係から出発し代数的に調べる。

(1) 以下の関係を示しなさい。

$$\hat{L_\mp}\hat{L_\pm} = \hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z \pm \hbar) \ \cdots \text{(*)},\ \ \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 = \frac{1}{2}(\hat{L_+}\hat{L_-} + \hat{L_-}\hat{L_+}) \cdots \text{(**)}$$

（解答例）

$$\hat{L_\mp}\hat{L_\pm} = (\hat{L}_x \mp i\hat{L}_y)(\hat{L}_x \pm i\hat{L}_y) = \hat{L}_x\hat{L}_x \mp i\hat{L}_y\hat{L}_x \pm i\hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_y$$

$$= (\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2) \pm i(\hat{L}_x\hat{L}_y - \hat{L}_y\hat{L}_x) = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 \mp \hbar\hat{L}_z = \hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z \pm \hbar)$$

(**) 式は、$(\hat{L_+}\hat{L_-} + \hat{L_-}\hat{L_+}) = 2(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2)$ より直ちに求まる。

(2) $\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ は交換するから、両者の同時固有状態$|\lambda,\mu>$ が存在する。すなわち、

$\hat{L}^2|\lambda,\mu> \ = \lambda|\lambda,\mu>$、　　$\hat{L}_z|\lambda,\mu> \ = \mu|\lambda,\mu>$

固有値λ,μ の間には $\lambda \geq \mu^2$ の関係が成り立つことを示せ。

（解答例）

$$<\lambda,\mu|(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2)|\lambda,\mu> = <\lambda,\mu|(\lambda-\mu^2)|\lambda,\mu> = (\lambda-\mu^2)<\lambda,\mu|\lambda,\mu> = \lambda-\mu^2 \ \ \text{(*)}$$

一方、（１）の結果より、

$$<\lambda,\mu|(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2)|\lambda,\mu> = <\lambda,\mu|\frac{1}{2}(\hat{L_+}\hat{L_-} + \hat{L_-}\hat{L_+})|\lambda,\mu> = \frac{1}{2}<\lambda,\mu|\hat{L_+}\hat{L_-}|\lambda,\mu> + \frac{1}{2}<\lambda,\mu|\hat{L_-}\hat{L_+}|\lambda,\mu>$$

$\hat{L}_+$ と $\hat{L}_-$ はエルミート共役なので、

$\hat{L}_-|\lambda,\mu> \ = |f>$ とすると　$<\lambda,\mu|\hat{L}_+ = <f|$

$\hat{L}_+|\lambda,\mu> \ = |g>$ とすると　$<\lambda,\mu|\hat{L}_- = <g|$

よって、$<\lambda,\mu|\frac{1}{2}(\hat{L_+}\hat{L_-} + \hat{L_-}\hat{L_+})|\lambda,\mu> = \frac{1}{2}(<f|f> + <g|g>) \geq 0$ (**)

(*)=(**) なので、$\lambda \geq \mu^2$

(3) $\hat{L_+}|\lambda,\mu>$ も $\hat{L_-}|\lambda,\mu>$ も やはり$\hat{L}^2$ と $\hat{L}_z$ の同時固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

（解答例）

問題６の結果より、　$[\hat{L^2},\hat{L_\pm}] = 0$ なので、$\hat{L^2}\hat{L_\pm} = \hat{L_\pm}\hat{L^2}$

$\hat{L}^2$ ($\hat{L_\pm}|\lambda,\mu>$) =$\hat{L_\pm}\hat{L}^2|\lambda,\mu>$ =$\hat{L_\pm}\lambda|\lambda,\mu>$ =λ ($\hat{L_\pm}|\lambda,\mu>$)

よって、$\hat{L_\pm}|\lambda,\mu>$ は　$\hat{L}^2$ の固有関数で固有値は λ

問題６の結果より、$[\hat{L_\pm},\hat{L}_z] = \mp\hbar\hat{L_\pm}$ なので、$\hat{L}_z\hat{L_\pm} = \hat{L_\pm}\hat{L}_z \pm \hbar\hat{L_\pm}$

$$\hat{L}_z(\hat{L_\pm}|\lambda,\mu>) = (\hat{L_\pm}\hat{L}_z \pm \hbar\hat{L_\pm})|\lambda,\mu> \ = \hat{L_\pm}(\hat{L}_z \pm \hbar)|\lambda,\mu>$$

$$= \hat{L_\pm}(\mu \pm \hbar)|\lambda,\mu> \ = (\mu \pm \hbar)(\hat{L_\pm}|\lambda,\mu>)$$

よって、$\hat{L_\pm}|\lambda,\mu>$ は $\hat{L}_z$ の固有関数でもある。固有値は $\mu \pm \hbar$.

すなわち、$c_\pm$ を係数として、

$$\hat{L_\pm}|\lambda,\mu> = c_\pm|\lambda,\mu \pm \hbar>$$

こうして、$\hat{L_\pm}$ は $\hat{L}_z$ の 固有値 を $\pm\hbar$ 変化させるので、$\hat{L_+}$ は上昇演算子、$\hat{L_-}$ は下降演算子と呼ばれる。

(4) $\hat{L_+}|\lambda,\mu_{max}>=0$、$\hat{L_-}|\lambda,\mu_{min}>=0$ なる状態があることを示せ。

（解答例）

$\lambda \geq \mu^2$ なので、μ の最大値 μ_{max}、μ の最小値 μ_{min} があるはず。

その状態に対して、$\hat{L_+}|\lambda,\mu_{max}>=0$、$\hat{L_-}|\lambda,\mu_{min}>=0$ でなければばらならない。（そうでなければ、$\hat{L_+}$、$\hat{L_-}$によって$\lambda<\mu^2$の状態ができてしまう）

(5) $\mu_{max}=l\hbar$ とおくと $\lambda=l(l+1)\hbar^2$、$\mu_{min}=-l\hbar$、$\mu/\hbar=-l,-l+1,\ldots,l-1,l$ となることを示せ。<u>したがって l は整数、または、半整数となる</u>。

（解答例）

$\hat{L_-}(\hat{L_+}|\lambda,\mu_{max}> = \hat{L_-}\hat{L_+}|\lambda,l\hbar>=0$ (*)

一方、(1)より $\hat{L_-}\hat{L_+}=\hat{L}^2-\hat{L}_z(\hat{L}_z+\hbar)$ なので、

$\hat{L_-}\hat{L_+}|\lambda,l\hbar>=(\hat{L}^2-\hat{L}_z(\hat{L}_z+\hbar))|\lambda,l\hbar>=(\lambda-l\hbar(l\hbar+\hbar))|\lambda,l\hbar>=(\lambda-l(l+1)\hbar^2)|\lambda,l\hbar>$

(*)よりこれも0になるので、$\lambda=l(l+1)\hbar^2$ (**)

$\hat{L_+}(\hat{L_-}|\lambda,\mu_{min}>)=0$ (***)

一方、(1)より $\hat{L_+}\hat{L_-}=\hat{L}^2-\hat{L}_z(\hat{L}_z-\hbar)$ なので、

$\hat{L_+}\hat{L_-}|\lambda,\mu_{min}>=(\hat{L}^2-\hat{L}_z(\hat{L}_z-\hbar))|\lambda,\mu_{min}>=(\lambda-\mu_{min}(\mu_{min}-\hbar))|\lambda,\mu_{min}>$

(***)より、これも0になるので、$\lambda=l(l+1)\hbar^2=\mu_{min}(\mu_{min}-\hbar))$

この式を満たす解は、$\mu_{min}=-l\hbar$

$\mu_{max}=l\hbar$ より $\hbar$ ずつ減らしていって、$\mu_{min}=-l\hbar$に到達するためには l は整数は半整数である必要がある。例えば、$l=3$（整数） の時、 l は $-3,-2,-1,0,+1,+2,+3$ をとる。$l=3/2$（半整数） の時 l は $-3/2,\ -1/2,\ +1/2,\ +3/2$ をとる。

（注意）「軌道角運動量」の場合は、解析的な条件から l は整数 である必要があった（講義ノート6-4-2節参照）。代数学的に解いた場合は、軌道角運動量であるという制限がない。上の結果より、この場合、l が半整数の場合も許されることがわかった。実際、電子のように、「スピン角運動量」は半整数の場合がある。